1. HAFTA

BLM221
MANTIK DEVRELERİ

Prof. Dr. Mehmet Akbaba
mehmetakbaba@karabuk.edu.tr

KBUZEM
Karabük Üniversitesi
Uzaktan Eğitim Uygulama ve Araştırma Merkezi

Temel Kavramlar

- Sayı Sistemlerinin İncelenmesi
- Sayı Sayı Sistemlerinin Dönştürülmesi
- Sayı Sistemlerinde Hesaplama

Sayı Sistemlerinin İncelenmesi

- **SAYI SİSTEMLERİ**
- **1. Sayı Sistemlerinin İncelenmesi**
- **Bir sayı sisteminde sayıyı S, taban değeri R ve katsayıyı da d ile gösterirsek tam sayı sistemi,**
- $S \quad = d_nR^n + d_{n—x}R^{n\sim x} + ... + dR + d_0R^0$
- **formülü ile gösterilir. Kesirli sayıları ifade etmek için aşağıdaki formül kullanılır.**
- $\mathbf{S} \quad = d_n\, R^n + d_{n-1}\, \mathbf{R}^{\mathbf{n-1}} + ... + \mathbf{d_1R^1} + d0R^{\mathbf{0}} + d_{-1}R^{-1} + d_{n-2}R\text{-}^{2}$ **+... olur.**

Sayı Sistemlerinin İncelenmesi

- **1.1 Onlu (Decimal) Sayı Sistemi**
- **Onlu sayı sisteminde taban değer R=10'dur ve 10 adet rakam (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) kullanılır. Eğer onluk sayıyı D ile gösterirsek genel denklem,**
- $D = d\ \mathbf{10}^{n} + d\ \mathbf{,10^{n-1}} + \ldots + \mathbf{d\ 10^{1}} + \mathbf{d_{n}\ 10^{n}} + d\ \mathbf{,10^{-1}} + d\ _{\mathbf{9}}\mathbf{10^{-2}} + \ldots$ **olur.**
- **Örnek: D = $(69.3)_{10}$**
- $= dR + dR^{0} + d\_R^{\ 1}$
- $= 6.10^{1} + 9.10^{0} + 3.10^{-1} = 69.3$

Sayı Sistemlerinin İncelenmesi

0 ve 1 rakamlarından meydana gelen ve taban değeri 2 olan sayı sistemidir. İkili sayı sisteminde her bir basamak BİT (BİnarY DigiT), en sağdaki basamak en düşük değerli bit (Least Significant bit- LSB), en soldaki basamak ise en yüksek değerli bit (Most Significant bit-MSB) olarak ifade edilir.

İkili sayı sisteminde sayı B ile gösterilirse genel ifade;

$B = d_n 2^n + d_{n-1} 2^{n-1} + ... + d_1 2^1 + d_0 2^0 + d_{-1} 2 + d_{-2} 2^{-2} + ...$ şeklinde olur.

$1111.10 = 1x2^3 + 1x2^2 + 1X2^1 + 1x2^0 + 1x2^{-1} + 0x2^{-2}$

Sayı Sistemlerinin İncelenmesi

- **MSB ⟵ 1110011 ⟶ LSB**
- **İkili sayı sistemleri bilgisayar gibi sayısal bilgi işleyen makinalarda kullanılmaktadır. Fakat bu sayı sistemi ile bir sayının ifade edilmesi için çok fazla sayıda basamak kullanmak gerekir. Bu nedenle ikili sisteme kolay çevrilebilen (veya tersi) sekizli (octal) ve onaltılı (hexadecimal) sayı sistemleri geliştirilmiştir.**

Sayı Sistemlerinin İncelenmesi

1.3 Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

- **Taban değeri sekiz olan ve 0-7 arası (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) değer alan sayı sistemidir. Genel ifadesi;**
- **O=** $d_n\, 8^{n} + d_{n-1} 8^{n-1} + \ldots + d_1\, 8^1 + d_0\, 8^0 + d_{-1} 8^{-1} + d_{-2}\, 8^{-2} + \ldots$ **şeklinde olur.**

- **Örnek:** **X=** $(47.2)_8$
- **X=** $4x8^1+7x8^0+2x8^{-1}$

1.4 Onaltılı (Hexadecimal) Sayı Sistemi

Taban değeri 16 olan ve 0-15 arası (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) değer alan sayı sistemidir. Genel ifadesi;

(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15)

$$H = d_{n}16^{n} + d_{n-1}16^{n-1} + \dots + d_{1}\,16^{1} + d_{0}\,16^{0} + d_{-1}16^{-1} + d_{-2}16^{-2} + \dots$$ **olur.**

Sayı Sistemlerinin İncelenmesi

- **Örnekler:**

- a) $H=(2A.C)_{16} = 2x16^{1}+10x16^{0}+12x16^{-1}$

- b) $H= (26.75)_{16}= (2x16^{1}+6x16^{0}+7x16^{-1}+5x16^{-2})_{10}$

- c)

  $H=(A5D.2C)_{16}=(10x16^{2}+5x16^{1}+13x16^{0}+2x16^{-1}$

  $+12x16^{-2})_{10}$

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

- **2. Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi**
- **2.1 Onluk sayıların ikili, sekizli ve onaltılı sayılara dönüştürülmesi**

- **Onluk sayı sisteminde tamsayıyı diğer sayı sistemine dönüştürmek için onluk sayı dönüştürülecek sayıya sürekli bölünür ve sondan başa doğru kalan yazılır.**

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

- ***Onluk sayıların ikilik sayılara dönüştürülmesi***
- ÖRNEK 1 : **$(53)_{10}$ sayısını ikili sayı sistemine çeviriniz.**
- **53 / 2 = 26, kalan = 1 En küçük bit (LSB: Less Significant Bit)**
- **26 / 2 = 13, kalan = 0**
- **13 / 2 = 6 , kalan = 1**
- **6/ 2 = 3, kalan = 0**
- **3 / 2 = 1, kalan = 1**
- **1/ 2 = 0, kalan = 1 En büyük bit (MSB: Most Significant Bit)**

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

- ***Tam sayı kısmı için sıralama aşağıdan yukarıya doğrudur.***
- $(53)_{10} = (110101)_2$
- **Örnek 2:** $(1271)_{10}$ **sayısını ikili sayıya dönüştürelim.**
- **Çözüm:**

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

İşlem		Bölüm	Kalan
1271 / 2	=	635	1
635 / 2	=	317	1
317 / 2	**=**	**158**	**1**
158 / 2	**=**	**79**	**0**
79 / 2	**=**	**39**	**1**
39 / 2	**=**	**19**	**1**
19 / 2	**=**	**9**	**1**
9 / 2	**=**	**4**	**1**
4 / 2	**=**	**2**	**0**
2 / 2	**=**	**1**	**0**
1			**1**

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

Sonuç olarak kalan kolonunu aşağıdan yukarıya doğru sıralarsak;

$$(1271)_{10} = (10011110111)_2$$

eşitliği bulunur.

Kesirli onluk sayılar ikili sayıya dönüştürülürken kesirli kısım sürekli 2 ile çarpılır. Çarpım sonucunda elde edilen sayının tam sayı kısmı yazılır. kesirli kısım 2 ile yeniden çarpılır. Bu işleme kesirli kısım ‘0’ değerine (veya 0’a çok yakın bir değere) ulaşıncaya kadar devam edilir.

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

Kesirli onlu sayılar ikili sayılara dönüştürülürken kesir kısmı 2 ile çarpılır. tam kısmı kaydedilir

ÖRNEK 2 : **$(41.6875)_{10}$ sayısını ikili sisteme çeviriniz.**

Tamsayı kısmı

41 / 2 = 20, kalan = 1
20 / 2 = 10, kalan = 0
10/ 2 = 5 , kalan = 0
5/ 2 = 2, kalan = 1
1/ 2 = 1, kalan = 0
1/ 2 = 0, kalan = 1

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

Kalan kolonu aşağıdan yukarıya doğru sıralanırsa:

$(41)_{10} = (101001)_2$

Kesirli kısım

0.6875 *2 = 1.3750 tamsayı = 1
0.3750 *2 = 0.7500 tamsayı = 0
0.7500 *2 = 1.5000 tamsayı = 1
0.5000 *2 = 1.0000 tamsayı = 1

Kesirli kısım için sıralama yukarıdan aşağıya doğrudur.

$(0.6875)_{10} = (1011)_2$

$(41.6875)_{10} = (101001.1011)_2$

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

Örnek 3: $(0.65)_{10}$ sayısını ikili sayı sistemine çevirelim.

Tam sayı Kısım yok. Sadece kesirli kısım vardır.

0.65 * 2 = 1.30	1	(s1)
0.30 * 2 = 0.60	0	(s2)
0.60 * 2 = 1.20	1	(s3)

Sıralama yönü yukarıdan aşağıya doğru olduğundan s1, s2, s3 sıralaması takip edilir.

Sonuç; $(0.65)_{10} \cong (0.101)_2$

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

Onluk sayıların sekizlik sayılara dönüştürülmesi

ÖRNEK 1: $(46)_{10}$ sayısını sekizli sayıya dönüştürün

46 / 8 = 5, kalan = 6

5/ 8 = 5, kalan = 5

$(46)_{10} = (56)_8$

Kesirli sayılar sekizli sayıya çevrilirken kesirli kısım 8 ile çarpılarak devam edilir. Tam sayı kısımlar alınıp yukarıdan aşağıya sıralanır.

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

ÖRNEK 1: **$(46.15)_{10}$ sayısını sekizli sayıya dönüştrün.**

Tamsayı Kısmı	**Kesirli Kısım,**
46/ 8 = 5, kalan = 6	**0.150* 8 = 1.200, tamsayı= 1**
5/ 8 = 5, kalan = 5	**0.200 * 8 = 1.600 tamsayı =1**
	0.600 * 8 = 4.800 tamsayı = 4

$(53.15)_{10} = (56.114)_8$

(Daha fazla hassasiyet istenirse kesirli kısım için işlem devam ettirilebilir)

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

Onluk sayıların onaltılık sayılara dönüştürülmesi

ÖRNEK 1: **$(46)_{10}$ sayıyı onaltılık sayıya dönüştürün.**

46/16 = 2, kalan = 14
2/ 16 = 0, kalan = 2

$(46)_{10} = (2E)_{16}$

Kesirli kısım 16 ile çarpılarak çikan sayının tam sayı kısmı alınıp yukarıdan aşağıya doğru sıralanır.

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

ÖRNEK 2: **$(220.975)_{10}$ sayıyı onaltılık sayıya dönüştrün.**

Tamsayı kısmı

220 / 16 = 13 kalan = 12 (C)

13 / 16 = 0 kalan = 13 (D)

Kesirli kısım

0.975x16 = 15.600 tamsayı = 15 (F)

0.600x16 = 9.600 tamsayı = 9

0.600 x 16 = 9.600 tamsayı = 9

$(220.975)_{10} = (DC.F99)_{16}$

2.2. İkili Sayıların Dnüştürülmesi

İkili sistemdeki bir sayı her basamağının ağırlık katsayısı ile çarpılıp bulunan değerlerin toplanması ile onlu sayı sistemine dönüştürülür.

ÖRNEK: $(10111.101)_2$ sayısını onlu sayıya dönüştürünüz.
$(10101.101)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, $1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 16 + 4 + 1$, $0.5 + 0.125 = (23.625)_{10}$

İkili Sayıların Sekizli Sayılara Dönüştürülmesi

İkili sayılar sekizliye dönüştürürken sayıların tam kısmı sağdan sola doğru, kesirli kısım ise soldan sağa doğru üçerli grup olarak düzenlenir. Sonra her bir sayı katsayısı ile çarpılarak sonuç bulunur.

ÖRNEK: **$(10101.101)_2$ sayısını sekizli sayıya dönüştürün.**

$$(10101.101)_2 = (010\ 101\ .\ 101) = (25.5)_8$$

İkili Sayıların Onaltılı Sayılara ***Dönştürülmesi***

İkili sayılar onaltılı sayıya dönüştürürken sayıların tam kısmı sağdan sola doğru, kesirli kısım ise soldan sağa doğru dörderli grup olarak düzenlenir. Sonra her bir sayı kendi katsayısı ile çarpılarak sonuç bulunur.

ÖRNEK: $(11101.101)_2$ sayısını onaltılı sayıya çeviriniz.

$$(11101.101)_2 = (0001\ 1101\ .1010) = (1\ 13\ .\ 10)_{16}$$
$$= (1D.A)_{16}$$

2.3 Sekizli Sayıların Dönüştürülmesi

Sekizli Sayıların İkili Sayılara dönüştürülmesi

Sekizli sayılar ikili sayılara dönüştürürken her basamağın ikili sayıdaki karşılığı yazılır.

ÖRNEK: **$(673.124)_8$ sayısını ikili sayıya dönüştürün.**

$6_{10} = 110_2$, $7_{10} = 111_2$, $3_{10} = 011_2$, $1_{10} = 001_2$,
$2_{10} = 010_2$, $4_{10} = 100_2$
$(673.124)_8 = (110\ 111\ 011.001\ 010\ 100)_2$

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

Sekizli Sayıların Onlu Sayılara dönüştürülmesi

Sekizli sayı onlu sayıya dönüştürürken her bir basamaktaki sayı kendi katsayısı ile çarpılır ve toplam bulunur.

ÖRNEK : $(32.12)_8$ sayısını onlu sayıya çeviriniz

$(32.12)_8 = 3 \times 8^1 + 2 \times 8^0 + 1 \times 8^{-1} + 2 \times 8^{-2}$

$= 24 + 2 + 0.125 + 0.03125 = (26.15625)_{10}$

Sekizli Sayının Onaltılı Sayıya dönüştürülmesi

Sekizli sayıyı onaltılı sayıya *dönüştürmenin* en kolay yolu sekizli sayıyı ikili sayıya dönüştrüp sonra onaltılı sayıya dönştürmektir (İkili sayıya dönüştürüldükten sonra 4'lü guruplar alınır).

ÖRNEK : $(32.12)_8$ sayısını onaltılı sayıya *dönüştürün.*

, $3_{10} = 011_2$, $2_{10} = 010_2$, $1_{10} = 001_2$, $2_{10} = 010_2$

$$(32.12)_8 = (011\ 010.001\ 010)_2$$

$$= (0001\ 1010\ .\ 0010\ 1000)_2 = (1\ 10\ .\ 2\ \ 8)_{16} = (1A.28)_{16}$$

2.4 Onaltılı sayıların Dönüştürülmesi

Onaltılı sayıların ikili sayılara dönüştürülmesi

Onaltılı sayılar ikili sayılara *dönüştürürken* onaltılı sayının her basamağındaki sayının ikili sayı karşılığı 4 bit olarak yazılır.

ÖRNEK: **$(32.12)_{16}$ sayısını ikili sayıya dönüştürün**

$3_{10} = 011_2$, $2_{10} = 010_2$, $1_{10} = 001_2$, $2_{10} = 010_2$

$(32.12)_{16} = (0011\ 0010.\ 0001\ 0010)_2$

Onaltılı sayıların sekizli sayıya dönüştürülmesi

Onaltılı sayıları sekizli sayıya dönüştrmenin en kolay yolu onaltılı sayıyı önce ikili sayıya dönüştürüp sonra sekizli sayıya dönüştürmektir.

ÖRNEK: $(32.12)_{16}$ **sayısını sekizli sayıya dönüştürün.**

$$= (0011\ 0010.\ 0001\ 0010)_2$$

$$(32.12)_{16} = (62.044)_8$$

Sayı Sistemlerinin Dönüştürülmesi

Onaltılı sayıların onlu sayıya dönüştürülmesi

Onaltılı sayı onlu sayıya çevrilirken her bir basamaktaki sayı kendi katsayısı ile çarpılır ve toplam bulunur.

ÖRNEK: $(32.12)_{16}$ sayısını onlu sayıya dönüştürün

$$(32.12)_{16} = 3 \times 16^{1} + 2 \times 16^{0}, 1 \times 16^{-1} + 2 \times 16^{-2}$$

$$= 48 + 2, 0.0625 + 0.00781$$

$$= (50.0703)_{10}$$

3.0 Sayı Sistemlerinde Hesaplama

Bütün sayı sistemlerinde işaret (+ veya -) kullanılabilir ve aşağıdaki bağıntılar bütün sayı sistemlerinde uygulanabilir.

1) $+a + (+b) = a + b$ 2) $+a + (-b) = a - b$
3) $+a - (+b) = a - b$
4) $+a - (-b) = a + b$

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

3.1 İkili (Binary) Sayı Sisteminde Toplama

İkili sayılarda toplama onlu sayılarda olduğu gibi basamak basamak toplamak suretiyle yapılır. Binary (ikili) sayı sisteminde toplama kuralı aşağıdaki gibidir:

0+0=0, 0+1=1, 1+0=1,
1+1=0 ve bir önceki (bir soldaki) kolona 1 ekle

0 + 0 =0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1= 0 ve bir önceki kolona 1 ekle

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

ÖRNEK 1: **$(111)_2$ sayısı ile $(011)_2$ sayısını toplayınız.**

```
 1 1 1      Eklemeler
   1 1 1
+  0 1 1
---------
  10 1 0
```

ÖRNEK 2: $(1101.110)_2 + (0110.101)_2 + (1111.111)_2$ sonucunu bulunuz.

$$
\begin{array}{r}
1101.110 \\
0110.101 \\
+ \quad 1111.111 \\
\hline
100100.010
\end{array}
$$

Örnek 3: Desimal 64 ve 99 sayılarını binary (ikili) sayı sistemi kullanarak toplayınız. (carrie: elde)

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

			1								Carrie
	64_{10}	=		1	0	0	0	0	0	0	
+	99_{10}	=		1	1	0	0	0	1	1	
	163_{10}	=	1	0	1	0	0	0	1	1	

$$1x2^7+0x2^6+1x2^5+0x2^4+0x2^3+0x2^2+1x2^1+1x2^0$$
$$=128+0+32+0+0+0+2+1=163_{10}$$

$(10100011)_2=(163)_{10}$

(binary 10100011 = desimal 163)

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

1.İkili (Binary) Sayı Sisteminde Çıkarma

İkili sayılarda çıkarma onlu sayılara benzer olarak yapılır.

0 - 0 = 0, 1 - 0 = 1, 1 - 1 = 0, 0 - 1 = 1 (Borç (barrow) 1, (bir soldaki kolondan 1 borç alınır))

ÖRNEK: $(1101.110)_2 - (0110.101)_2$ **sonucunu bulunuz.**

$$
\begin{array}{rr}
 & 1101.110 \\
- & 0110.101 \\
\hline
 & 0111.001
\end{array}
$$

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

İkili sayılarda sayının sıfırdan küçük olması durumunda doğrudan çıkarma işlemi uygulanamamaktadır. Bunun yerine tümleyen aritmetiğine göre çıkarma işlemi uygulanmaktadır.

ÖRNEK 1: $(11)_2$ sayısını $(111001)_2$ sayısından çikartınız. (barrow: Borç)

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

ÖRNEK 1: **$(11)_2$ sayısını $(111001)_2$ sayısından çikartınız. (barrow: Borç)**

```
        1   1      borrows
    1 1  1  0 0 1
-              1 1
------------------
    1 1  0  1 1 0
```

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

Örnek 2:

	1	1	1	1		borrows
	1	0	0	0	0	
-				1	1	
		1	1	0	1	

İkili Sayı Sisteminde (Binary) Çarpma

Binary çarpmanın temeli aşağıdaki gibidir:

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$

Örnek 1

13_{10} ve 11_{10} sayılarının binary çarpımını bulalım:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\quad = 143_{10}
$$

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

Örnek 2: Binary çarpma yaparken eldeleri şaşırmadan doğru yapmak için ara çarpımlar yapmak kolaylık sağlar.

1 1 1 1	
1 1 0 1	
1 1 1 1	1. ara çarpım
0 0 0 0	2. ara çarpım
(0 1 1 1 1)	1. ve 2. ara çarpımların toplamı
1 1 1 1	3. ara çarpım
(1 0 0 1 0 1 1)	3. ara çarpımdan sonraki toplam
1 1 1 1	4. ara çarpım
1 1 0 0 0 0 1 1	Sonuç

İkili (Binary) Sayı sisteminde Bölme

Binary bölme normal ondalık sayıdaki bölme gibidir

Örnek 1: 110_2 sayısını 10_2 sayısına bölelim (binary bölme)

```
          1  1    (Sonuç)
       ________
1  0 | 1  1  0
       1  0
       --------
       0  1  0
          1  0
          -----
          0  0
```

Sayı Sistemlerinde Hesaplama

Örnek 2: Sayısını 25_{10} 8_{10} sayısına binary olarak bölelim ($=3.125_{10}$)

```
             11.001
        ____________
1000 | 11001
       1000
       ____
       01001
        1000
        ____
        0001000
            1000
            ____
            0000
```

KAYNAKÇA

1. **Mehmet Akbaba, Mantık Devreleri Notları**
2. **Hüseyin EKİZ, Mantık Devreleri, Değişim Yayınları, 4. Baskı, 2005**
3. **Thomas L. Floyd, Digital Fundamentals, Prentice-Hall Inc. New Jersey, 2006**
3. **M. Morris Mano, Michael D. Ciletti, Digital Design, Prentice-Hall, Inc.,New Jersey, 1997**