2. HAFTA

BLM221

MANTIK DEVRELERİ

Prof. Dr. Mehmet Akbaba

mehmetakbaba@karabük.edu.tr

Temel Kavramlar

- Tümleyen Aritmetiği
- r Tümleyeni Aritmetiği
- r-1 Tümleyeni Aritmetiği
- İkili Sayı Kodları
- BCD Kodu
- Ağırlıklı Kodlar
- Ağırlıksız Kodlar

Tümleyen Aritmetiği

- **Öncelikle bilmek gereken konu sadece negatif (-) sayıların tümleyeninden bahsediliyor. Tümleyenini alcağımız sayıların negatif sayılar olduğunu varsaycağız.**
- **Tümleyen ifadesini örneklemek için sayıcıları kullanabiliriz. Sayıcılar yukarı doğru sayarken 01, 02 diye artar. Aşağı doğru sayarken ise 09, 08 diye azalır. Burada 09'un tümleyenine 01, 08'in tümleyenine de 02 denilmektedir.**

Tümleyen Aritmetiği

- **İkili sayı sisteminde iki tümleyen kullanılmaktadır. Bunlar 1'in tümleyeni ve 2'nin tümleyeni r tabanlı bir sayı sisteminde tümleyenler r (r:radix (tümleyeni ve r-1 tümleyeni olarak ifade edilir.**
- **ÖRNEK: 10 tabanlı bir sayı sisteminde r tümleyeni 10, r-1 tümleyeni 9 dur.**
-

2.1.1 r-Tümleyeni

r tabanlı bir tam sayı sisteminde n basamaklı pozitif tamsayı N ile gösterilirse N sayısının r tümleyeni $N^r=r^n-N$ olarak tanımlanabilir (n: kullanılan bit veya basamak sayısı.)

ÖRNEK 1: $(125.456)_{10}$ sayısının 10 tümleyenini bulunuz.
$(125)_{10}$ sayısının tamsayı kısmı 3 basamaklıdır. Bu nedenle $r^n = 10^3$ tür.
$N^{r=}r^n$- N = 10^3 -125.456 = 874.544

Tümleyen Aritmetiği

Örnek 7: **$(21.426)_{10}$ sayısının 10'a tümleyenini ve 9'a tümleyenini bulunuz.**

10'a tümleyeni:

$N^r=10^n-N=100.000-21.456=78.544$ olur.

9'a tümleyeni:

r-1 tümleyen=$N^{r-1}=r^n-r^{-m}-N$

$N^{r-1}=10^2-10^{-3}-21.426=100-0.001-21.426=78.543$ olur.

Tümleyen Aritmetiği

- **ÖRNEK 2: $(110010.1011)_2$ sayısının 2'ye tümleyenini bulunuz.**
- **$(110010.1011)_2$ sayısının tamsayı kısmı 6 basamaklıdır. Bu nedenle $r^n = 2^6$ dır.**
- **$N^{r=}r^n$- N = 2^6 - 110010 = 1000000-110010.1011 = 0001101.0101 olur.**
- **İkili sayı sisteminde 2'nin tümleyeni iki şekilde bulunabilir (ikili sayı sisteminde r=2 dir).**
- ***N sayısındaki bitlerin tersi alınır (1'ler 0, 0'lar 1 yapılır) ve LSB'e 1 eklenir.***

Tümleyen Aritmetiği

- **ÖRNEK 3: $(110010)_2$ sayısının r (r=2) tümleyenini bulunuz.**
- **$(110010)_2$ sayısında 1'ler 0, 0'lar 1 ile değiştirilirse $(001101)_2$ sayısı elde edilir. LSB'e 1 eklenirse $(001110)_2$ sayısı bulunur.**
- **$(110010)_2$ sayısının r tümleyeni $(001110)_2$ dir.**
- ***N sayısındaki LSB'ten itibaren sıfırdan farklı ilk sayıya kadar (ilk sayı dahil) alınır, kalan bitlerin tersi alınır. (1'ler 0, 0'lar 1 yapılır)***

Tümleyen Aritmetiği

ÖRNEK 4: $(110010)_2$ sayısının r (burada r=2) 2'ye tümleyenini bulunuz.
$(110010)_2$ sayısında 0'dan farklı ilk sayıya kadar bitler yazılır ve kalan bitlerin tersi alınırsa $(001110)_2$ sayısı elde edilir.
$(110010)_2$ sayısının 2 tümleyeni $(001110)_2$ dir.
Veya r^n-N fomülü uygulanırsa:

$$N^{r=}2^6-110010=1000000-110010=001110$$

elde edilir.

Tümleyen Aritmetiği

2.1.2 r-1 Tümleyeni

- **Bir N tam sayının r-1 tümleyeni $N^{r-1}=r^n-1-N$ olur.**
- **Kesirli bir N sayının tümleyeni $N^{r-1}=r^n-r^{-m}-N$ dir.**
- **n: tamsayı kısmındaki basamak (digit) sayısı**
- **m: kesirli kısımdaki basamak (digit) sayısı**
- **ÖRNEK 5 : 2314 desimal sayısının 9'a tümlenini bulalım. Çözüm n=4, r=10. 10^4-1-2314=**
- **=10000-1-2314 =9999-2314=7685 elde edilir.**

- **ÖRNEK 6: Binary $(101101)_2$ sayısının r-1 (r=2) veya 1' tümleyenini bulunuz.**

Tümleyen Aritmetiği

- **ÖRNEK 7 : 2314 desimal sayısının 9 tümlenini bulalım.**
- **n=4, r=10. 10^4-1-2314=10000-1-2314=9999-2314=7685 elde edilir.**
- **ÖRNEK 8: Binary $(101101)_2$ sayısının r-1 (r=2) veya 1 tümleyenini bulunuz.**
- **Normalde 0 ları 1 birleri 0 yapmak yeter: Sonuç= 010010 elde edilir.**

Tümleyen Aritmetiği

Normalde 0 ları 1 birleri 0 yapmak yeter:
Sonuç= 010010 elde edilir.

Fomül uygulanırsa:
2^6-1-101101=1000000-0000001-101101=0010010
aynı sonuç bulunur.

Tümleyen Aritmetiği

Kesirli sayıların r-1 tümleyeni $N^{r-1} = r^n - r^{-m} - N$ dir.

Örnek 9: $(624.125)_{10}$ sayısının 10'a ve 9'a tümleyenlerini bulunuz.

Çözüm: r=10, n=3, m=3

Sayının 10'a tümleyeni=10^3-624.125=375.875 olur.

9'a tümleyeni=10^3-10^{-3}-624.125=375.874

Örnek 10: $(100110.011)_2$ binary (ikili) sayısının 2'ye ve 1'e tümleyenlerini bulunuz.

Çözüm: r=2, n=6, m=3

Sayının 2'ye tümleyeni: 2^6-100110.011=011000.101

1'e tümleyeni:

1000000-0.001-100110.011=1000000-100110.100

=0011001.1 olur

Tümleyen Aritmetiği

- **ÖRNEK11 : Desimal (725.250) sayısının 9'a tümleyenini bulunuz.**
- **r = 10, n = 3, m = 3 olduğundan 9'a tümleyeni;**
- **$10^3 - 10^{-3}$ - 725.250 =1000-0.001-725.250= 275.749**

- **ÖRNEK 12: Binary (110.1011) sayısının 1'e tümleyenini bulunuz. r = 2, n = 3, m = 4 olduğundan 1'e tümleyeni;**
- **$2^3 - 2^{-4}$ - 110.1011 = 1000-0.0001 - 110.1011 = 001.0100**

Tümleyen Aritmetiği

- Yukarıdaki örneklerden görüleceği gibi 10 tabanındaki bir sayının r-1 =9'a tümleyeni bulunurken her basamaktaki sayı 9'dan çıkarılır.
- İkili sayı sisteminde ise bitler ters çevrilir.

- **ÖRNEK 13**: $(1001011011)_2$ binary sayısının 1'e tümleyenini bulunuz.
- Çözüm: 0 ları 1 ve 1 leri 0 yapmak yeterli. Sonuç: 0110100100 olur.

Tümleyen Aritmetiği

- **2.1.4. r tümleyen aritmetiği ile çıkarma**
- **R tabanındaki iki pozitif sayının ‘M - N’ işlemi aşağıdaki gibi özetlenebilir.**
- ***a) M sayısının kendisi ile N sayısının r tümleyeni toplanır***
- ***b) Toplama sonucunda bulunan değerin ‘elde’ si varsa bu değer atılır ve sayının pozitif lduğu kabul edilir. Eğer elde değeri yoksa bulunan değerin r tümleyeni alınır ve önüne - işareti konur.***

Tümleyen Aritmetiği

- **ÖRNEK 1: (72532-3250) sayısının sonucunu 10'a tümleyen kullanarak bulunuz.**

- **03250 sayısının 10 tümleyeni 100000 - 3250 = 96750.**
- **Ohalde sonuç: 72532 + 96750 = 169282 (Elde 1 var)**
- **İşaret biti 1'dir bu yüzden sonuç +69282 dir.**

Tümleyen Aritmetiği

ÖRNEK 2: Desimal (03250 - 72532) sayısının sonucunu 10 tümleyeni kullanarak bulunuz.

72532 sayısının 10 tümleyeni 100000 - 72532 = 27468 03250 + 27468 = 030718 (Elde 0 var)

İşaret biti 0‘dır bu yüzden 030718’in tümleyeni alınır ve önüne - işareti konur.
Sonuç (-69282) dir.

Tümleyen Aritmetiği

ÖRNEK 3: $(1010100)_2$ - $(1000100)_2$ sayısının sonucunu 2'nin tümleyenini kullanarak bulunuz.

(1000100)2 sayısının 2 tümleyeni 0111100 dir. Dolayısiyle sonuç: 1010100 + 0111100 = 10010000 (İşaret biti 1)
İşaret biti 1 olduğundan sonuç + 0010000 olur.

Tümleyen Aritmetiği

2.1.5 r-1 tümleyeni ile çıkarma

r-1 tümleyeni ile çıkarma işlemi r tümleyeni ile çıkarma işlemine benzer. M-N işlemi için

a) M sayısının kendisi ile N sayısının r-1 tümleyeni toplanır

b) Sonuçta elde (taşma) biti oluşursa bulunan değere (taşma bitinden geriye kalan kısım) 1 eklenir.

Taşma biti oluşmazsa sonuç sayının tümleyeni alınır ve sayı negatif işaretli olur.

Tümleyen Aritmetiği

ÖRNEK 1: (72532-3250) sayısının sonucunu 9 tümleyeni kullanarak bulunuz.

Çözüm: $N^{r-1}=r^n - r^{-m} - N$ formülü kullanılırsa negatif sayı -03250 sayısının 9'a tümleyeni 10^5-0-3250-1= 99999 - 3250 = 96749 dır.
72532 + 96749 = 169281 (Elde 1 var)
İşaret biti 1'dir bu yüzden sonuç 69281+1 =
= +69282 olur.

Tümleyen Aritmetiği

ÖRNEK 2: (03250 - 72532) sayısının sonucunu 9'a tümleyeni kullanarak bulunuz.

Çözüm:
72532 sayısının 9 tümleyeni 99999 - 72532 = 27467 dır.
03250 + 27467 = 030717 (Elde 0 var)
İşaret biti 0'dır bu yüzden 30717'in tümleyeni alınır ve önüne -işareti konur. Sonuç (-69282)

Tümleyen Aritmetiği

ÖRNEK 3: $(1010100)_2$ - $(1000100)_2$ sayısının sonucunu 1'in tümleyenini kullanarak bulunuz.

$(1000100)_2$ sayısının 1 tümleyeni 0111011 dir.
1010100 + 0111011 = 10001111 (İşaret biti (elde) 1)
İşaret biti 1 olduğundan sonuç 0001111 + 1 = 0010000 dır.

Örnek Soru Çözümleri

Soru 1 - Aşağıdaki sayıları onluk tabana dönüştürünüz.

a) $(4310)_5$ b) $(198)_{12}$ c) $(735)_8$ d) $(525)_6$

Çözüm:

$(4310)_5 = 4 * 5^3 + 3 * 5^2 + 1 * 5^1 =(580)_{10}$

$(198)_{12} = 1 * 12^2 + 9 * 12^1 + 8 * 12^0 = (260)_{10}$

$(735)_8 = 7 * 8^2 + 3 * 8^1 + 5 * 8^0 = (477)_{10}$

$(525)_6 = 5 * 6^2 + 2 * 6^1 + 5 * 6^0 = (197)_{10}$

Örnek Soru Çözümleri

d) Önce sayının binary (ikili) sayıya dönüştürülmesi gerekir. Decimal sayının binary sayıya nasıl dönüştürüleceğini biliyoruz.

$(23.84)_{10}$ $=(10111)_2$ olur.

1’e tümleyen= 01000,

2’ye tümleyen=01001 olur.

Örnek Soru Çözümleri

Soru 2 - Aşağıdaki sayıların 1'e (1's complement) ve 2 'ye (2's complement) tümleyenlerini bulunuz.

a) $(1100110)_2$ b) $(01101101)_2$ c) $(111101)_2$
d) $(23.84)_{10}$ e) $(125.625)_{10}$

Çözüm:

a) 1'e tümleyen: 0011001,
2'ye tümleyen: 0011010
b) 1'e tümleyen: 10010010,
2'ye tümleyen: 10010001
c) 1'e tümleyen: 000010,
2'ye tümleyen: 000011

Örnek Soru Çözümleri

e) Sayının binary (ikili) dönüşümü:
$(125.625)_{10}=(1111101.101)_2$

1'e tümleyen: 0000010.100,

2'ye tümleyen: 0000011.100

Örnek Soru Çözümleri

Soru 3: **Aşağıdaki sayıları onluk sayılara dönüştürmeden toplayın ve çarpın.**

a) $(11001)_2$ ve $(1101)_2$ **b) $(2AC)_{16}$ ve $(E2)_{16}$**

c) $(3A4)_{16}$ ve $(C5)_{16}$

Çözüm: a)

$$
\begin{array}{rl}
11001 & (=25_{10}) \\
+\ 1101 & (=13_{10}) \\
\hline
100110 & = (38)_{10}
\end{array}
$$

Örnek Soru Çözümleri

$$
\begin{array}{r}
11001 \\
\times \quad 1101 \\
\hline
11001 \\
+ \quad 11001 \\
\hline
1001011 \\
+ \quad 11001 \\
\hline
\end{array}
$$

$$(10010011)_2 = (275)_{10} = (25 \times 11)$$

Örnek Soru Çözümleri

b)

$$
\begin{array}{rll}
 & (2AC)_{16} & [\,(684)_{10}] \\
+ & (\;E2)_{16} & [\,(226)_{10}] \quad (684+226=910) \\
\hline
 & (\,38E)_{16} & =(910)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
 & (2AC)_{16} & [\,(684)_{10}] \\
X & (\;E2)_{16} & [\,(226)_{10}] \quad (684x226=154584) \\
\hline
 & 558 & \\
+ & 2568 & \\
\hline
 & (25BD8)_{16} & = (154584)_{10}
\end{array}
$$

Örnek Soru Çözümleri

c)

$$
\begin{array}{rl}
 & (3A4)_{16} \quad [\,(932)_{10}] \\
+ & (\;C5)_{16} \quad [\,(197)_{10}] \quad (932+197=1129) \\
\hline
 & (\,469)_{16} \quad =(1129)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & (3A4)_{16} \quad [\,(932)_{10}] \\
X & (\;C5)_{16} \quad [\,(197)_{10}] \quad (932x197=183604) \\
\hline
 & 1234 \\
+ & 2BB0 \\
\hline
 & (2CD34)_{16} \;=\; (183604)_{10}
\end{array}
$$

İKİLİ SAYI SİSTEMİNDE (BINARY) KODLAR

1) İKİLİ KODLANMIŞ ONLU SAYI KODU (BINARY CODED DECIMAL (BCD))

Bilgisayarlar genelde binary sayılarla işlem yaparlar, ancak sonuçlar onluk sayı sisteminde verilir. Bu nedenle ondalık (Decimal) sayıların ikili sayı sistemşnde kodlanması gerekmektedir. Aşağıdaki örnek bu kodlayı açıklamaya yeterlidir

937.25 sayısı BCD olarak aşğıdaki gibi kodlanır:

1001 0011 0111 . 0010 0101

9 3 7 2 5

Görüldüğü gibi her bir decimal (onluk) sayı binary (ikili) sayı olarak kodlanmıştır.

BCD (İkili (binary) kodlanmış ondalık sayı) sayılarla Toplama:

Örnek 1: $146_{10}+259_{10}=405_{10}$

	0001 0100 0110	BCD formunda yazılım
+	0010 0101 1001	
	0011 1001 1111	
+	0110	düzeltme sayısı (1111>9)
	0011 1010 0101	
+	0110	düzeltme sayısı (1010>9)
	0100 0000 0101	$=405_{10}$

Herhangi bir BCD blok 9 dan büyük olunca o bloka düzeltme sayısı olarak 6 (binary 0110) eklenir.

Örnek 2:

$52_{10}+199_{10}=251_{10}$

	0000 0101 0010	BCD formunda yazılım
+	0001 1001 1001	
	0001 1110 1011	
+	0110 0110	düzeltmeler
	0010 0101 0001	$=251_{10}$

AĞIRLIKLI KODLAR

2) 8-4-2-1 KODU (bu kod ağırlıklı bir koddur)

	8-4-2-1 KODU			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

3) 6-3-1-1 KODU (AĞIRLIKLI KOD)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	0	1
5	0	1	1	1
6	1	0	0	0
7	1	0	0	1
8	1	0	1	1
9	1	1	0	0

3) 4-3-2-1 CODE (Ağırlıklı kod)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	0	1
9	1	1	1	0

AĞIRLIKLIKSIZ KODLAR

4) ARTI 3 (EXCESS 3) Kodu (Ağırlıksız kod)

0	0	0	1	1
1	0	1	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	0	1
7	1	0	1	0
8	1	0	1	1
9	1	1	0	0

Bu kod 8-4-2-1 kodunun her sayısına 3 (0011) eklenerek bulunmustur ve ağırlıksız bir koddur.

5. 5’te 2 Kodu (AĞIRLIKSIZ KOD)

0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
2	0	0	1	1	0
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0
5	0	1	1	0	0
6	1	0	0	0	1
7	1	0	0	1	0
8	1	0	1	0	0
9	1	1	0	0	0

her ondalık sayı 5 bit ile yazılmıştır ve her satırda sadece iki tene 1 vardır. Analog-digital ölçmelerde çok kullanılan bir koddur.

6) GRAY Kodu (Ağırlıksız kod)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1

Ölçülmüş anlog işaretlerin dijital işarete dönüştürülmesine sıkça kullanılan bir koddur (A/D converters), örneğin motorların hızını when mesuring mil encoderi kullanarak ölçülmesinde.

ASKI (ASCII) KOD

ASCII: American Standard Code for Informatıon Interchange

Character	ASCII Code							Character	ASCII Code						
	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0		A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
space	0	1	0	0	0	0	0	@	1	0	0	0	0	0	0
!	0	1	0	0	0	0	1	A	1	0	0	0	0	0	1
"	0	1	0	0	0	1	0	B	1	0	0	0	0	1	0
#	0	1	0	0	0	1	1	C	1	0	0	0	0	1	1
$	0	1	0	0	1	0	0	D	1	0	0	0	1	0	0
%	0	1	0	0	1	0	1	E	1	0	0	0	1	0	1
&	0	1	0	0	1	1	0	F	1	0	0	0	1	1	0
'	0	1	0	0	1	1	1	G	1	0	0	0	1	1	1
(	0	1	0	1	0	0	0	H	1	0	0	1	0	0	0
)	0	1	0	1	0	0	1	I	1	0	0	1	0	0	1
*	0	1	0	1	0	1	0	J	1	0	0	1	0	1	0
+	0	1	0	1	0	1	1	K	1	0	0	1	0	1	1
,	0	1	0	1	1	0	0	L	1	0	0	1	1	0	0
–	0	1	0	1	1	0	1	M	1	0	0	1	1	0	1
.	0	1	0	1	1	1	0	N	1	0	0	1	1	1	0
/	0	1	0	1	1	1	1	O	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	P	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	Q	1	0	1	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	1	0	R	1	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	1	1	S	1	0	1	0	0	1	1
4	0	1	1	0	1	0	0	T	1	0	1	0	1	0	0

Table 1-3 ASCII code (incomplete)

Kaynakça:

1. Mehmet Akbaba, Mantık Devreleri Notları
2. Hüseyin EKİZ, Mantık Devreleri, Değişim Yayınları, 4. Baskı, 2005
3. Thomas L. Floyd, Digital Fundamentals, Prentice-Hall Inc. New Jersey, 2006
4. M. Morris Mano, Michael D. Ciletti, Digital Design, Prentice-Hall, Inc.,New Jersey, 1997