



3. HAFTA

# BLM 221

# MANTIK DEVRELERİ

Prof Dr Mehmet AKBABA

[mehmetakbaba@karabuk.edu.tr](mailto:mehmetakbaba@karabuk.edu.tr)

**KBUZEM**

Karabük Üniversitesi

Uzaktan Eğitim Uygulama ve Araştırma Merkezi

# Temel Kavramlar

---

- **BOOLE CEBİRİ.**
- **TEMEL TEOREMLER**
- **BOOLEAN İFADELERİNİN LOJİK KAPILARLA GERÇEKLEŞTİRİLMESİ VE DOĞRULUK TABLOLARI**

# BOOLE CEBİRİ

---

- **Elektronik devrelerin bir kısmını oluşturan anahtarlama sistemlerinin temelini oluşturduğu Lojik devreler, ikili moda göre çalışır ve giriş /çıkışları '0' veya '1' değerlerinden birisini alabilir. Böyle bir devre, cebirsel veya grafiksel yöntemlerden birisi kullanılarak sadeleştirilebilir. Lojik devrelerin sadeleştirilmesinde kullanılan yöntemlerden birisi, temel prensiplere göre doğruluğu kabul edilmiş işlemler, eşitlikler ve kanunlardan oluşan Bool kurallarıdır.**

# BOOLE CEBİRİ

---

- **Diğer bir deyişle; ‘Bool kuralları’, dijital devrelerin sahip oldukları girişlerin etkilerini açıklamak ve verilen bir lojik eşitliği gerçekleştirecek en iyi devreyi belirlemek amacıyla lojik ifadeleri sadeleştirmede kullanılabilir.4**
- **Bool Değişkeni: İki adet boolean değişkeni vardır. 0-1, D (doğru)-Y(yanlış), H(high)-L(Low), ON-OFF bool değişkenleri olarak kullanılmaktadır. Bu derste 0-1 kullanılacaktır.**

# BOOLE CEBİRİ

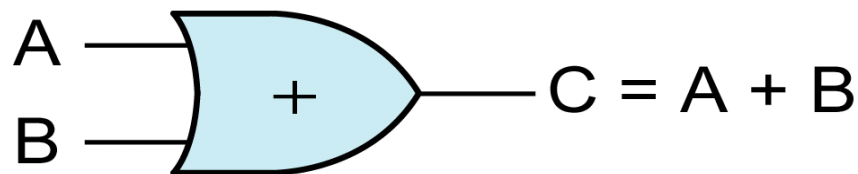
**Bool İşlemleri:** Bool değişkenlerinin dönüşümünde kullanılan işlemlerdir. Bu işlemler VE (**AND**), VEYA(**OR**), DEĞİL (**NOT**) işlemleridir.

- **3.1 VEYA (OR) İşlemi:**
- Matematikteki toplama işlemine karşılık gelmektedir. Elektrik devresi olarak birbirine paralel bağlı anahtarlar ile gösterilebilir.
- Şekil 3.1.a'de VEYA (**OR**) işleminin doğruluk tablosu, Şekil 3.1.b' de simgesi, ve Şekil 3.1.c' de elektrik devre eşdeğeri verilmiştir.

# BOOLE CEBİRİ

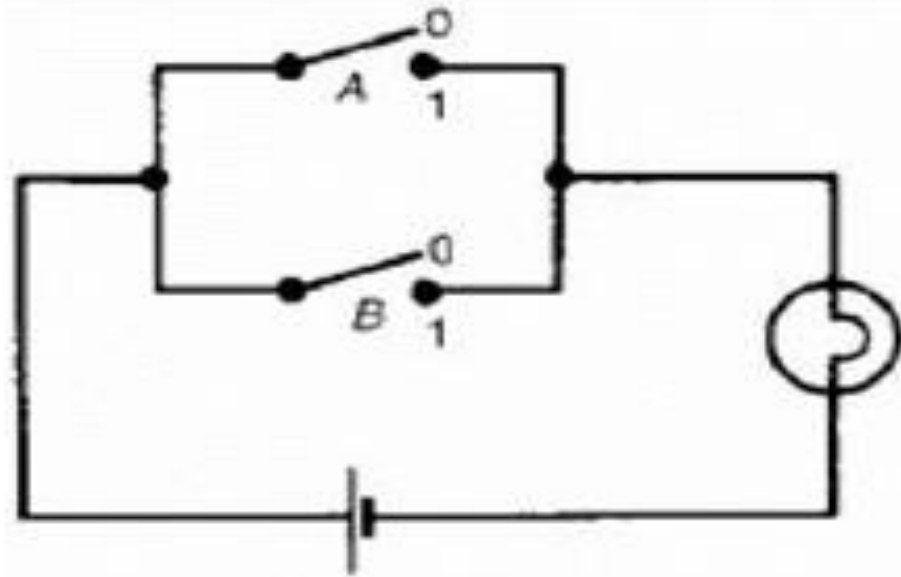
A	B	C=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Şekil 3.1.a: VEYA (OR) işleminin doğruluk tablosu



Şekil 3.1.b: VEYA (OR) işleminin simgesi

# BOOLE CEBİRİ



**Şekil 3.1.c: VEYA (OR) İşlemi: Elektrik devre eşdeğeri**

**OR kapısı lojik toplama işlemi yapar.**

# BOOLE CEBİRİ

---

## 3.2 VE (AND) İşlemi:

Matematikteki çarpma işlemine karşılık gelmektedir. Elektrik devresi olarak birbirine seri bağlı anahtarlar ile gösterilebilir.

Şekil 3.2.a'da VE (AND) işleminin doğruluk tablosu, Şekil 3.1.b' de simgesi, ve Şekil 3.1.c' de elektrik devre eşdeğeri verilmiştir.

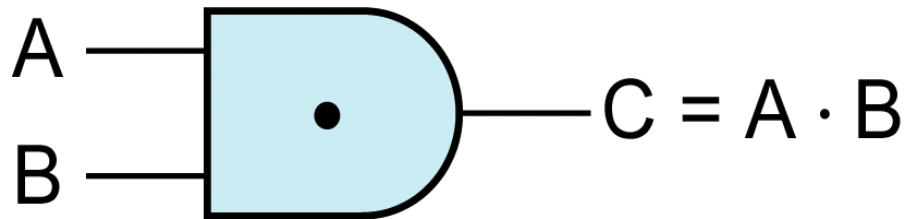


# BOOLE CEBİRİ

---

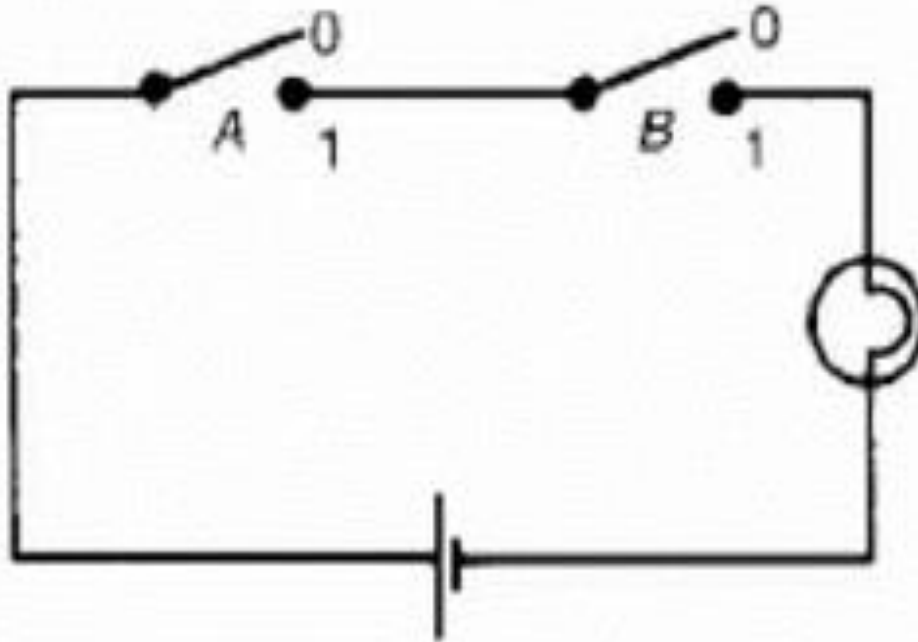
$A$	$B$	$C = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Şekil 3.2.a: VE (**AND**) işleminin doğruluk tablosu



Şekil 3.2.b: VE (AND) işleminin simgesi

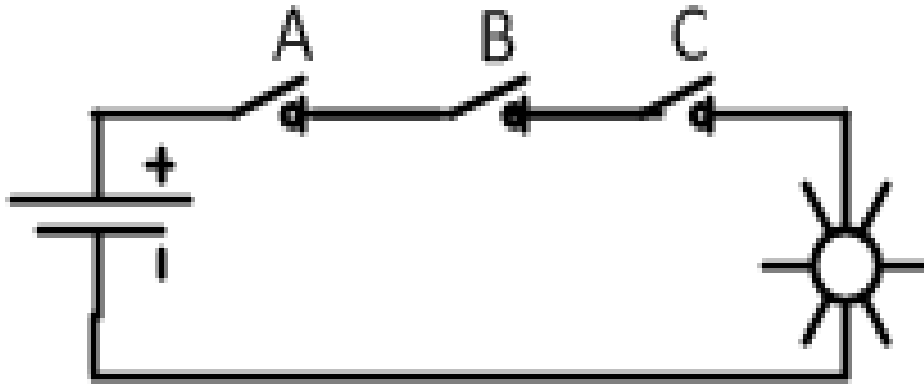
# BOOLE CEBİRİ



**Şekil 3.2.c: VE (AND) işleminin elektrik devre**

# BOOLE CEBİRİ

Yukarıda iki değişkenli Bool işlemleri verilmiştir. Değişken sayısı arttığıında da işlemler benzer olarak yapılmaktadır. Üç değişken için VE (**AND**) işleminin elektrik devre eşdeğeri Şekil 3.3.a'da ve doğruluk tablosu Şekil 3.3.b'da verilmiştir.



Şekil 3.3.a: Üç değişkenli VE (**AND**) işleminin elektrik devre eşdeğeri

# BOOLE CEBİRİ

Input			Output
A	B	C	$Z = A \cdot B \cdot C$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

**Şekil 3.3.b: Üç değişkenli VE (AND) işleminin doğruluk tablası**

# BOOLE CEBİRİ

## 3.4 DEĞİL (NOT) İşlemi:

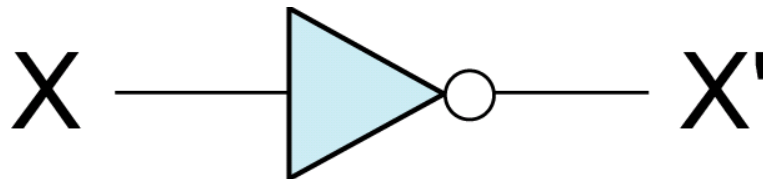
A değişkeninin DEĞİL'i  $A'$  veya  $\bar{A}$  ile gösterilir.

□  $A$   $A'$

0 1 (A=0 ise  $A'=1$ )

1 0 (A=1 ise  $A'=0$ )

DEĞİL (**NOT**) işleminin simgesi Şekil 3.4'de verilmiştir.



Şekil 3.4: DEĞİL (**NOT**) işlemleri verilmiştir

# BOOLE CEBİRİ

---

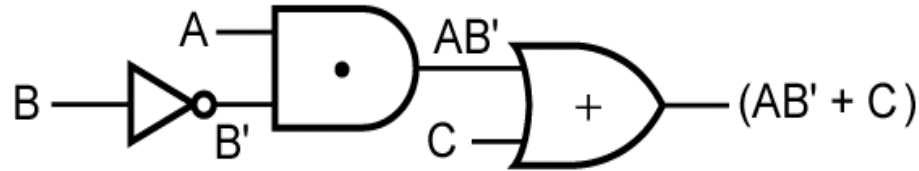
## 3. 5. BOOLEAN İFADELERİNİN LOJİK KAPILARLA GERÇEKLEŞTİRİLMESİ VE DOĞRULUK TABLOLARI (TRUTH TABLES)

Aşağıdaki lojik bağıntılar lojik kapılarla kolayca gerçekleştirilebilir:

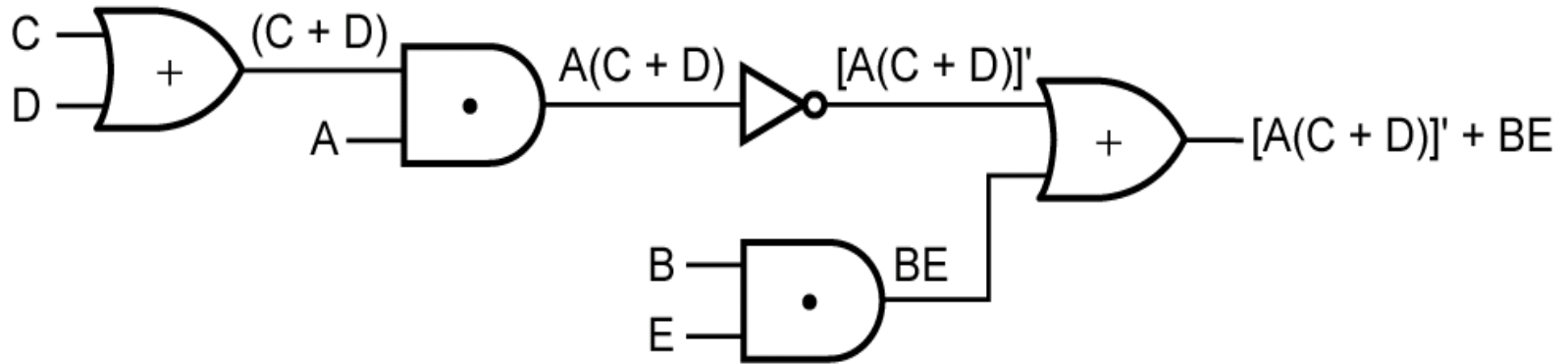
$$\text{a) } AB'+C \qquad (3.1)$$

$$\text{b) } [A(C+D)]'+BE \qquad (3.2)$$

# BOOLE CEBİRİ



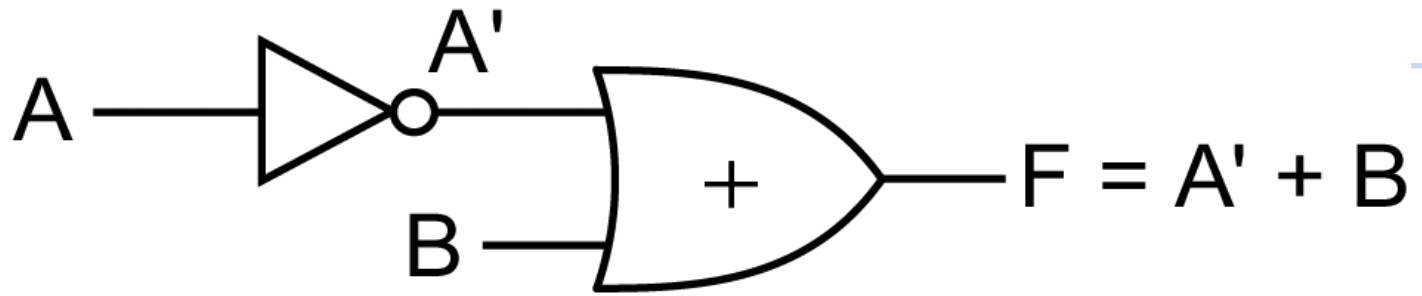
(a)



(b)

**Şekil 3.4 : (3.1) ve (3.2) bağıntılarını gerçekleştiren lojik devreler**

# BOOLE CEBİRİ



$A$	$B$	$A'$	$F = A' + B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

(b)

**$A'+B$  bağıntısının devresi ve doğruluk tablosu**



# BOOLE CEBİRİ

---

**Şekil 3.5  $AB'+C$  ve  $(A+C)(B'+C)$  lojik ifadelerinin doğruluk tablosunu göstermektedir. 3 tane değişken söz konusu olduğu için doğruluk tablosunda**

**$2^3=8$  kombinasyon dolayısı ile 8 satır olacaktır (n değişkenin  $2^n$  kombinasyonu vardır).**

**Şekil 3.5 deki tablo aynı zamanda**

$$AB'+C=(A+C)(B'+C) \quad (3.3)$$

**Lojik eşitliğin ispatını da vermektedir.**

# BOOLE CEBİRİ

A B C	B'	AB'	AB'+C	A+C	B'+C	(A+C)(B'+C)
0 0 0	1	0	0	0	1	0
0 0 1	1	0	1	1	1	1
0 1 0	0	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	1	0	0
1 1 1	0	0	1	1	1	1

**Şekil 3.5: (3.3) Lojik ifadesinin (eşitliğinin) doğruluk tabloları ile ispatı**

# BOOLE CEBİRİ

## TEMEL TEOREMLER

---

**0 ve 1 ile işlem:**

$$X+0=X \quad (3.4) \qquad X.1=X \quad (3.4D)$$

$$X+1=1 \quad (3.5) \qquad X.0=0 \quad (3.5D)$$

**Idempotent kuralı:**

$$X+X=X \quad (3.6) \qquad X.X=X \quad (3.6D)$$

**Involution (involüsyon) kuralı:**

$$(X')'=X \quad (3.7)$$

**Tümlerin varlığı (complementarity) kuralı:**

$$X+X'=1 \quad (3.8) \qquad X.X'=0 \quad (3.8D)$$

Bu teoremlerde X herhangi bir bağıntı (lojik ifade) olabilir.

. Bu durumda teorem (3.5) ten:

$$(AB'+D)E+1=1 \quad \text{Ve teorem (3.8D) den:}$$

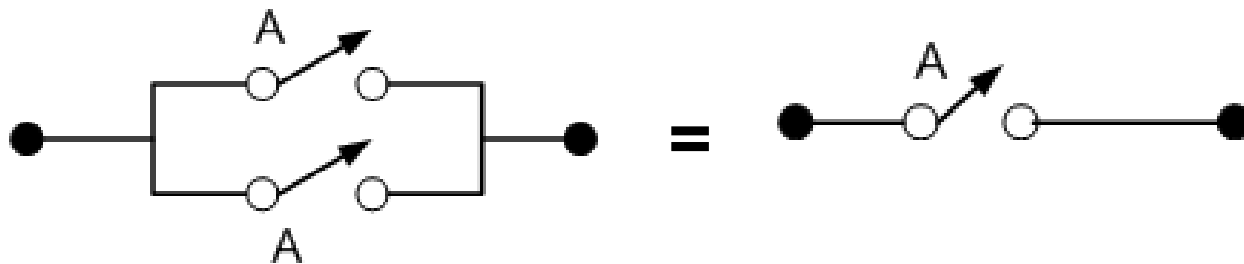
$$(AB'+D)(AB'+D)'=0$$

---

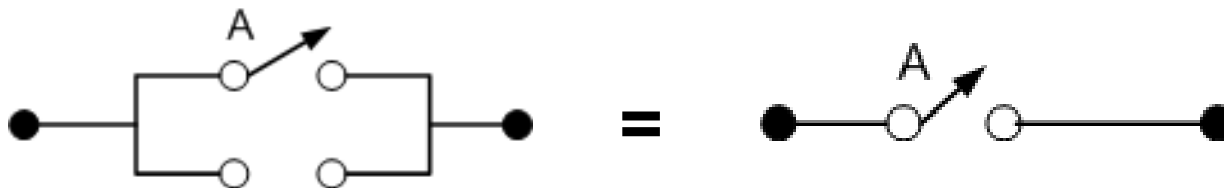
# BOOLE CEBİRİ



**Teorem  $A.A=A$  nın anahtarlama devresi karşılığı**



**Teorem  $A+A=A$  nın anahtarlama devresi karşılığı**



**Teorem  $A+0=A$  nın anahtarla devresi karşılığı**

# BOOLE CEBİRİ

---

Yer değişitme (**Commutative**), Birleşme (**Associative**) ve Dağılma (**Distributive**) kuralları

Yer deęiřitme (**Commutative**) kuralı:

$$XY= YX \quad (3.9) \quad X+Y= Y+X \quad (3.9D)$$

Yer deęiřitme (**Associative**) kuralda boole ifadelerini istedięimiz şekilde yazabiliriz:

$$(XY)Z= X(YZ)= XYZ \quad (3.10)$$

$$(X+Y)+Z= X+(Y+Z)= X+Y+Z \quad (3.10D)$$

# BOOLE CEBİRİ

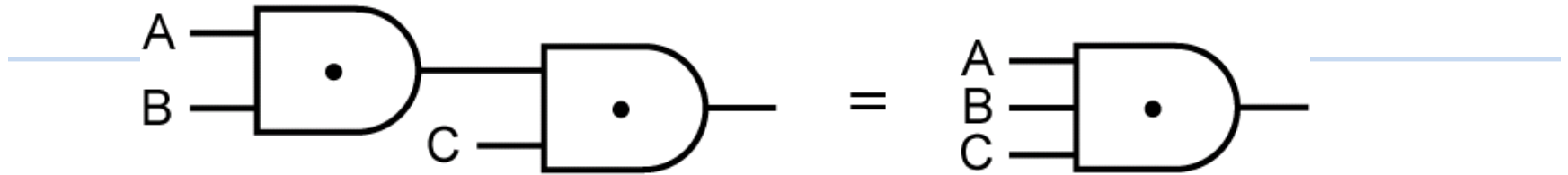
Table 2-2: Proof of Associative Law for AND

$X$	$Y$	$Z$	$XY$	$YZ$	$(XY)Z$	$X(YZ)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

**Birleşme (Associative) kuralının doğruluk tablosu ile ispatı**

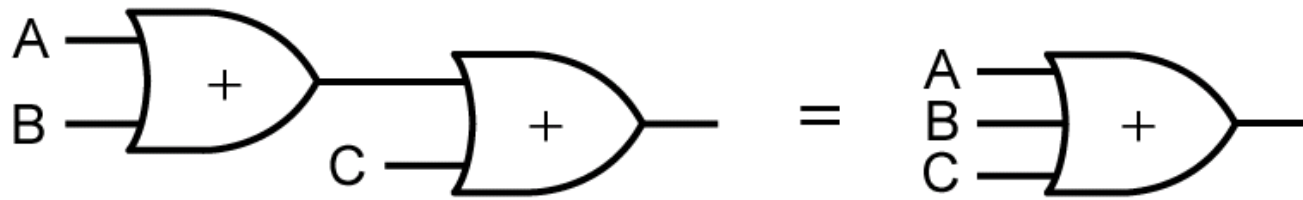
©2004 Brooks/Cole

# BOOLE CEBİRİ



$$(AB)C = ABC$$

(a)



$$(A + B) + C = A + B + C$$

(b)

**Şekil 3.5: AND and OR için Associative kural (kanun) (Law) devreleri**

# BOOLE CEBİRİ

---

**Dağılma (Distributive) kuralı**

**Birinci dağılma (distributive) kuralı:**

$$X(Y+Z)=XY+XZ$$

**İkinci dağılma (distributive) kuralı:**

$$X+YZ=(X+Y)(X+Z)$$

**(bildiğimiz normal matematik kurallarında bu bağıntı geçerli olmaz)**

**İspat (doğrulama) (Proof):**

$$(X+Y)(X+Z)=X(X+Z)+Y(X+Z)=XX+XZ +YX+YZ$$

$$=X+XZ+XY +YZ=X.1+XZ+XY+YZ$$

$$=X(1+Z+Y)+YZ=X.1+YZ=X+YZ$$



# BOOLE CEBİRİ

**Bu iki dağılma (distributive) kurallar çok önemlidir ve aşağıdaki hallerde kullanılır:**

- 1. Boole bağıntılarının basitleştirilmesinde (Aynı fonksiyonu gerçekleştiren iki Boole bağıntısından basit olanı ile gerçekleştirilecek olan lojik devre daha ucuz, daha hafif, daha güvenilir (reliable) daha az yer kaplar ve bu önemli nedenlerle daha çok tercih edilir)**
  - 2. SOP (some of products = Çarpımların toplamı ve POS (product of sums) = Toplamlar ın çarpımı formlarının elde edilmesinde**
  - 3. Minterm ve Maxtermlerin elde edilmesinde**
- 2 ve 3 teki terimlerin anlamlarını, ne işe yaradıklarını daha sonraki derslerimizde açıklanacaktır.**

# BOOLE CEBİRİ

. POS (**P**roduct **O**f **S**ums) Toplamların Çarpımı

Örnekleri:

$$(A + B')(C + D' + E)(A + C' + E')$$

veya

$$B(A+B'+C'+E)(A+D'+E)$$

SOP ( **S**um **O**f **P**roduct ) Çarpımlar ın Toplamı

Örnekleri:

$$AB'C+CD+ABD$$

Veya

$$A+CDE+ACE +D$$

# BOOLE CEBİRİ

## Basitleştirme Teoremleri

$$XY + XY' = X \quad (3.12)$$

$$(X + Y)(X + Y') = X \quad (3.2D)$$

$$X + XY = X \quad (3.13)$$

$$X(X + Y) = X \quad (3.13D)$$

$$(X + Y')Y = XY \quad (3.14)$$

$$XY' + Y = X + Y \quad (3.14D)$$

# BOOLE CEBİRİ

---

## İSPATLAR

**(3.13) ün ispatı:**

$$X+XY=X.1+XY=X(1+Y)=X.1=X$$

**(3.13D) in ispatı:**

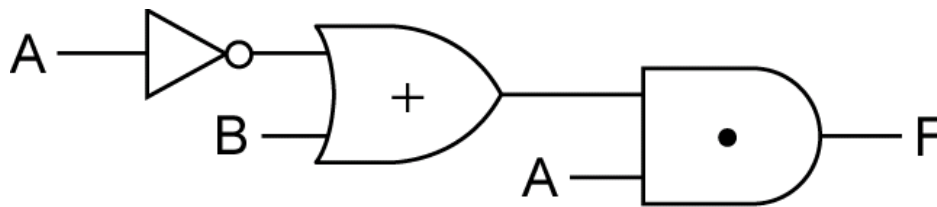
$$X(X+Y)=XX+XY=X+XY=X(1+Y)=X$$

**(3.14D) ispatı:**

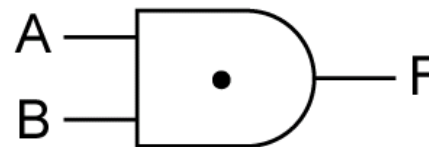
$$Y+XY'=(Y+X)(Y+Y')=(Y+X).1=Y+X$$

# BOOLE CEBİRİ

**Örnek 1: Aşağıdaki devrelerin çıkışında elde edilen lojik fonksiyonları basitleştirin:**



(a)



(b)

**Şekil 3.5.a daki  $F=A(A'+B)$  ifadesi (3.14) bağıntısı kullanılırsa  $F=AB$ . Basitleştirilmiş logic fonksiyon şekil 3.5.b deki basit hale dönüşür.**

# BOOLE CEBİRİ

**Örnek 2:**  $Z=A'BC+A'$  ifadesini basitleştirin

**Çözüm:**

$BC=Y$  ve  $A'=X$  yazarsak yukarıdaki ifade  $Z=X+XY =X(1+Y)$  olur.  $1+Y=1$  olduğundan  $Z=X.1=X$  olur.

Teorem (3.13) kullanılırsa

$Z=X$  veya  **$Z=A'$**  elde edilir.

**Örnek 3:**

$Z=[A+B'C+D+EF][A+B'C+(D+EF)']$  ifadesini basitleştirin.

**Çözüm:**  $X=A+B'C$  ve  $Y=D+EF$  yazılırsa

$Z=[X+Y][X+Y'] =XX+XY'+XY+XY'+YY'=X+X(Y+Y')+YY'$

$Z=(X+Y)(X+Y')$  olur. Teorem (3.12D) uygulanırsa :

$Z=X$  veya  **$Z=A+B'C$**

# BOOLE CEBİRİ

**ÖRNEK 4:**  $Z = (AB+C)(B'D+C'E')+(AB+C)'$   
Lojik İfadesini basitleştirin.

---

**Çözüm:**

$X=AB+C$  ve  $Y=B'D+C'E'$  yazarsak:

$$Z=XY+X' = X'+XY = (X'+X)(X'+Y), \quad X+X'=1,$$

$Z=Y+X'$  Elde edilir.

X ve Y nin ifadeleri yerlerine yazılırsa:

$$Z=B'D+C'E'+(AB+C)' \text{ olur.}$$

# BOOLE CEBİRİ

---

**Örnek 5:**  $A + B'CD$  ifadesini faktörlerine ayırınız (POS: Toplamların çarpımı şeklinde yazınız)

**Çözüm:** Verilen Lojik ifade  $X + YZ$  şeklindedir. Burada

$X = A$ ,  $Y = B'$ , ve  $Z = CD$ , Dolayısıyla:

$$A + B'CD = (X + Y)(X + Z) = (A + B')(A + CD)$$

$A + CD$  ifadesi ikinci dağılım kuralı uygulanarak faktörlerine ayrılabilir ve sonuç olarak

$$A + B'CD = (A + B')(A + C)(A + D) \text{ elde edilir.}$$

**SOP** formunda verilen lojik ifade (fonksiyon) **POS** formuna dönüştürülmüş oldu.



# BOOLE CEBİRİ

---

**Örnek 6:**  $AB' + C'D$  lojik ifadesini faktörlere ayırınız (SOP formundan POS formuna dönüştürünüz).

**ÇÖZÜM:**

$X + YZ = (X + Y)(X + Z)$  kuralını (ikinci dağılma kuralı) arka arkaya uygulandırsa:

$$AB' + C'D = (AB' + C')(AB' + D)$$

$$= (A + C')(B' + C')(A + D)(B' + D)$$

elde edilir.

# BOOLE CEBİRİ

## ÖRNEK 7:

~~$C'D + C'E' + G'H$  SOP ifadesini POS formuna dönüştürünüz.~~

$$= (C' + G'H)(D + E' + G'H)$$

$$= (C' + G')(C + H)(D + E' + G')(D + E' + H)$$

As in Example 3, the ordinary distributive law should be applied before the second law when factoring an expression.

A sum-of-products expression can always be realized directly by one or more AND gates feeding a single OR gate at the circuit output. Figure 2-5 shows the circuits for Equations (2-15) and (2-17). Inverters required to generate the complemented variables have been omitted

# BOOLE CEBİRİ

## ÖRNEK 7:

**$F = C'D + C'E' + G'H$  SOP ifadesini POS formuna dönüştürünüz.**

### **Çözüm:**

**Önce birinci dağılma kuralını uygulayalım:**

**$F = C'(D + E') + G'H$  elde edilir.**

**Şimdi ikinci dağılma kuralını arka arkaya uygulayalım:**

$$F = (C' + G'H)(D + E' + G'H)$$

$$F = (C' + G')(C + H)(D + E' + G')(D + E' + H)$$

**elde edilir.**

# BOOLE CEBİRİ

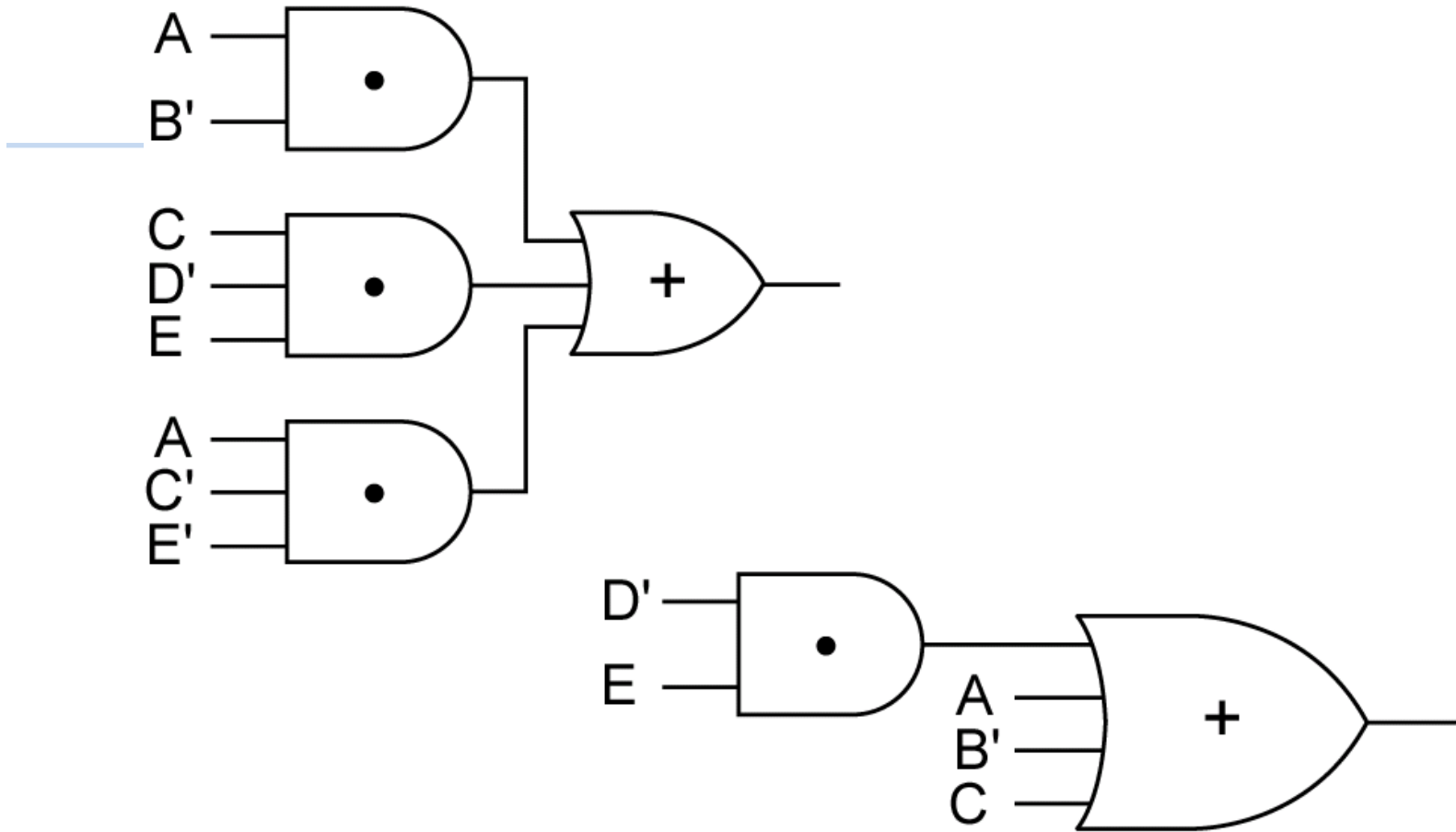
---

**Çarpımların toplamı ifadesi genel olarak bir kaç tane VE (AND) kapılarının ortak bir veya kapısının Girişine bağlanması ile gerçekleştirilir. Aşağıdaki İki lojik fonksiyonun bu şekilde gerçekleştirilmesi Şekil 3.6 da örneklenmiştir.**

$$F1=AB+CD'E+AC'E' \quad (3.15)$$

$$F2=D'E+AB'C \quad (3.16)$$

# BOOLE CEBİRİ



**Şekil 3.6: (3-15) ve (3-16) lojik fonksiyonlarını gerçekleştiren lojik devreler.**

# BOOLE CEBİRİ

---

## ÖRNEKLER:

a)  $(A+B+C)' = A'+B'+C'$

b)  $(AB+C)' = (AB)'.C' = (A'+B').C'$

c)  $(A.B'.C) = A'+B+C'$

d)  $((A+B).C')' = (A+B)'+C = A.B+C$

e)  $((AB).C+A(B+C'))' = (ABC)'.(A(B+C'))'$   
 $=(A'+B'+C').(A+B'.C)$

# BOOLE CEBİRİ

---

**Bir lojik fonksiyonun Dualı AND leri OR lar ile OR ları AND ler ile 0 ları 1 ile ve 1 leri 0 ile yer değiştirerek elde edilir. AND in dualı OR, OR un dualı AND dir. Bu aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:**

$$(XYZ \dots)^D = X + Y + Z + \dots$$

$$(X+Y+Z+\dots)^D = XYZ \dots$$

# BOOLE CEBİRİ

---

**Bir lojik ifadenin dualı tüm ifadenin değilini aldıktan sonra her bir değişkeninde değilini alarak bulunabilir..**

**Örneğin**

**$AB'+C$**

**İfadesinin dualı aşağıdaki gibi olur.**

$$(AB'+C)^D = (A+B')C$$

**olur.**

$$((A+B)C+DCE+E')^D = (AB+C).(D+C+E). E' \text{ olur.}$$



# Kaynakça

---

- **Mehmet Akbaba, Mantık Devreleri Notları**
- **Hüseyin EKİZ, Mantık Devreleri, Değişim Yayınları, 4. Baskı, 2005**
- **Thomas L. Floyd, Digital Fundamentals, Prentice-Hall Inc. New Jersey, 2006**
- **M. Morris Mano, Michael D. Ciletti, Digital Design, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1997**