

4. HAFTA

Boole Cebiri Uygulamaları

Standart Formlar

Prof. Dr. Mehmet Akbaba

4.1 STANDART FORMLAR: SOP VE POS FORMALRININ BİRİBİRİLERİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

POS(product-of-sums) formunda verilmiş bir ifade, aşağıdaki şekilde çarpıp açtıktan sonra ikinci dağılma kuralı uygulanarak SOP (**sum-of-products**) formuna dönüştürülür.:

$$X(Y + Z) = XY + XZ \quad (4-1)$$

$$(X + Y)(X + Z) = X + YZ \quad (4-2)$$

Ayrıca aşağıdaki teoremdende sıkça yararlanır:

$$(X + Y)(\underline{X'} + Z) = XZ + X'Y \quad (4.3)$$

İspat:

$X = 0$ için (4-3) $Y(1 + Z) = 0 + 1 \cdot Y = Y$

$X = 1$ için(4-3) $(1 + Y)Z = 1 \cdot Z = Z$.

Bağıntı hem $X = 0$ ve $X = 1$ geçerli olduğundan her zaman doğrudur.

Ayrıca Aşağıdaki örnek (4-3) teoreminin faktörlerin ne kadar yararlı olduğunu göstermektedir:

$$\underline{AB+A'C} = (A + C)(A' + B)$$

Teorem (4-3) ifadelerin kolayca çarpılıp açılmasında kullanılır. Aşağıdaki örnek bu kavramı açıklamaktadır.

Dikkat edilmesi gereken husus teimlerin brinde X değerinde X' (X in tümleyeni veya değili) olmalıdır.

$$\underline{(Q + AB')(CD + Q')} = QCD + Q'AB'$$

Dağılma kuralı yalın olarak uygulanırsa aşağıdaki gibi 2 terim yerine 4 terim elde edilir ve ifade gereksiz olarak uzar. Buda istenmeyen bir durumdur. Buradan (4.3) eşitliğinin önemi açıkça görülmektedir.

$$(Q + AB')(CD + Q') = QCD + QQ' + AB'CD + AB'Q'$$

Genel kural olarak gereksiz terimler üretmemek için fonksiyonların çarpılarak açılmasında (4-3) eşitliği (4-1) ve (4-2) ile beraber kullanılır ve çoğunlukla (4-2) ve (4-3), (4-1) den önce uygulanır.

İşlemi hızlandırmak için aşağıda görüldüğü gibi guruplandırma yapılır.

$$[(X+A)(X+B)=X+AB, (X+A)(X'+A)=XA+X'A]$$

$$\begin{aligned}
 & (A + B + C')(A + B + D)(A + B + E)(A + D' + E)(A' + C) \\
 &= (A + B + C'D)(A + B + E)[AC + A'(D' + E)] \\
 &= (A + B + C'DE)(AC + A'D' + A'E) \\
 &= AC + \cancel{ABC} + A'BD' + A'BE + A'C'DE
 \end{aligned}$$

Sadece (4.1) kullanılsaydı 162 terim ortaya çıkacaktı ve bunlardan 158 nin bir şekilde elimine edilmesi gerekecekti ve buda çok içinden çıkılmaz bir durum olacaktı.

Faktörlere ayırma örneği (standart POS (toplamların çarpımı) elde edilmesi örneği)

$$= (A + B + C'DE)(A + C'DE + D' + E)(A' + C)$$

$$= (A+B+C')(A+B+DE)(A+D'+E)(A'+C)$$

$$= (A + B + C')(A + B + D)(A + B + E)(A + D' + E)(A' + C)$$

Exclusive-OR and Equivalence İşlemleri

Exclusive-OR işlemi (\oplus) aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$0 \oplus 0 = 0 \quad 0 \oplus 1 = 1 \quad 1 \oplus 1 = 0$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$X \oplus Y$ nin doğruluk tablosu aşağıda verimiştir

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Yukarıdaki tablodan $X \oplus Y = 1$ olabilmesi için $X = 1$ veya $Y = 1$, olması gerekir. Her ikisi 1 veya her ikisinde 0 olması durumunda Exclusive-OR (**EX-OR**) işleminin sonucu sıfır olur.

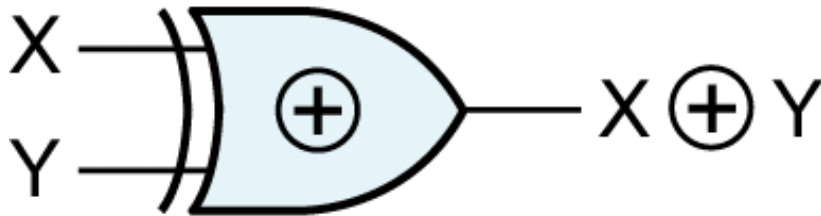
EX-OR işleminin açık ifadesi (4.4) eşitliğinde verilmiştir. Buradan **EX-OR** eşitliğinin 2 tane VEYA ve 1 tane VE kapısından oluştuğu görülmektedir.

$$X \oplus Y = X' Y + X Y' \quad (4.4)$$

$$X \oplus Y = (X + Y)(XY)' = (X + Y)(X' + Y') = X'Y + XY' \quad (4.5)$$

(4-5), bağıntısındaki $(X Y)' = (X' + Y')$ sadece X veya Y den birinin 1 diğerinin 0 olması durumunda gerçekleşir.

EX-OR kapısının simgesi aşağıda gösterilmiştir:



Aşağıdaki bağıntılar EX-OR işlemi için geçerlidir:

$$X \oplus 0 = X$$

$$X \oplus 1 = X'$$

$$X \oplus X = 0$$

$$X \oplus X' = 1$$

$$X \oplus Y = Y \oplus X \text{ (commutative law)}$$

$$(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z) = X \oplus Y \oplus Z \text{ (associative law)}$$

$$X(Y \oplus Z) = XY \oplus XZ \text{ (distributive law)}$$

$$(X \oplus Y)' = X \oplus Y' = X' \oplus Y = XY + X'Y'$$

Aşağıdaki bağıntılar doğruluk tablosu veya (4- 5) eşitliğinin uygulamaları ile ispatlanabilir.

$$\begin{aligned}XY \oplus XZ &= XY(XZ)' + (XY)'XZ = XY(X' + Z') + (X' + Y')XZ \\ &= XYZ' + XY'Z \\ &= X(YZ' + Y'Z) = X(Y \oplus Z)\end{aligned}$$

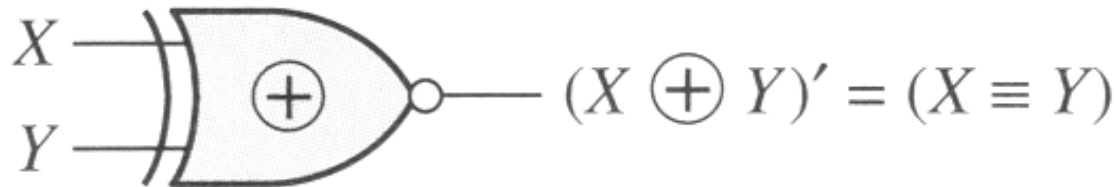
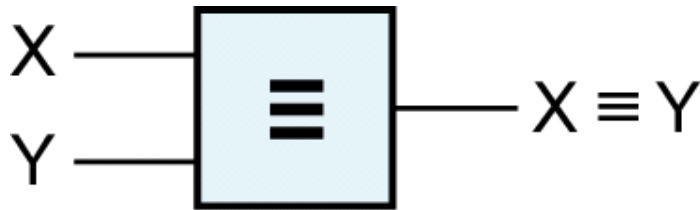
Equivalence işlemi (\equiv) aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

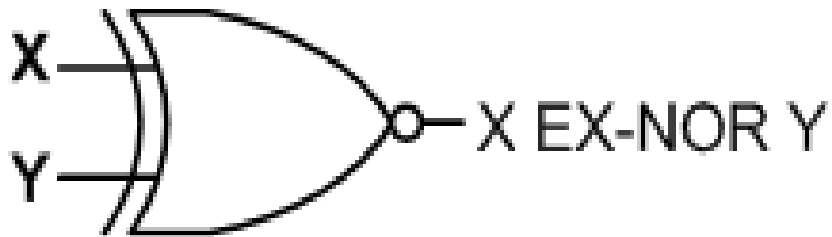
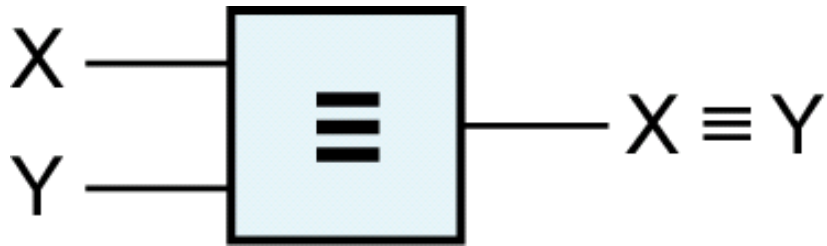
$$\begin{array}{ll} (0 \equiv 0) = 1 & (0 \equiv 1) = 0 \\ (1 \equiv 0) = 0 & (1 \equiv 1) = 1 \end{array} \quad \textbf{(4.6)}$$

Yukarıdaki eşitlikler equivlence işleminin EX-OR işleminin tersi veya tümleyeni olduğunu Göstermektedir.

$$(XY' + X'Y)' = (X' + Y)(X + Y') = XY + X'Y' = X \equiv Y \quad (4.7)$$

Equivalence deyimi EX-NOR anlamınadır ve aşağıdaki semboler kullanılır:





Ex-NOR

X	Y	$X \equiv Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Doğruluk tablosu

ÖRNEK 1: Aşağıdaki lojik eşitliğin açık ifadesini bulunuz

$$F = (A'B \equiv C) + (B \oplus AC')$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} F &= [(A'B)C + (A'B)'C'] + [B'(AC') + B(AC')'] \\ &= A'BC + (A + B')C' + AB'C' + B(A' + C) \\ &= B(A'C + A' + C) + C'(A + B' + AB') = B(A' + C) + C'(A + B') \end{aligned}$$

Açıklama:

$$F = B(A'(1+C) + C) + C'(A(1+B') + B') = B(A' + C) + C'(A + B')$$

ÖRNEK 2: Aşağıdaki lojik eşitliğin açık ifadesini bulunuz

$$F = A' \oplus B \oplus C$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} F &= A' \oplus B \oplus C = [A'B' + (A')'B] \oplus C \\ &= (A'B' + AB)C' + (A'B' + AB)'C \\ &= (A'B' + AB)C' + ((A+B).(A'+B'))C \\ &= (A'B' + AB)C' + (AA' + AB' + A'B + BB')C \\ &= A'B'C' + ABC' + AB'C + A'BC \end{aligned}$$

$$= (A'B' + AB)C' + (AB' + A'B)C \quad (**)$$

Dikkatli bakılırsa (**) eşitliğinin problemde Verilen eşitlikle aynı olduğu gözlemlenebilir.

Konsensus Teoremi

Konsensus teoremi lojik ifadelerin (fonksiyonların) basitleştirilmesinde kullanılan önemli bir tuldur.

İki formu vardır. **Form 1:**

$$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z$$

YZ terimi anlamsız terimdir ve denklemden elimine edilebilir (atılabilir) ve bu terime **konsensüs** terimi denir.

Form 2:

$$(X+Y)(X'+Z)(Y+Z) = (X+Y)(X'+Z)$$

$Y+Z$ terimi **konsensüs terimidir ve atılabilir.**

Örneğin ab ve $a'c$ terimlerinin konsensüsü bc dir.
 abd ve $b'de'$ terimlerinin konsensüsü $(ad)(de') = ade'$ dir.
 $ab'd$ ve $a'bd'$ terimlerinin konsensüsü 0 dir.

Konsensüs teoreminin ispatı:

$$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z \quad (\text{Form 1})$$

İspat:

$$\begin{aligned} XY + X'Z + YZ &= XY + X'Z + (X + X')YZ \\ &= (XY + XYZ) + (X'Z + X'YZ) \\ &= XY(1 + Z) + X'Z(1 + Y) = XY + X'Z \end{aligned}$$

Konsensüs teoremi Boole bağıntılarından anlamsız terimleri elimine ederek basitleştirilmelerine çok işe yarar. expressions. Örneğin $b'c$ terimi $a'b'$ ve ac terimlerinin konsensüsü, ve ab terimi ac ve bc' terimlerinin konsensüsüdür, ve her iki konsensüs terimleri bağıntılardan atılabilir.

($a'b'+ac+b'c=a'b'+ac$ ve $ac+bc'+ab=ac+bc'$) Aşağıdaki örnek bu konsepti açıklamaktadır.

$$a'b' + ac + bc' + b'c + ab = a'b' + ac + bc'$$

Form 2 konsensüs örneği:

$$(a + b + c') \overbrace{(a + b + d')}^{\downarrow} (b + c + d') = (a + b + c')(b + c + d')$$

Bazen kolayca yokedilebilecek terimleri hemen yok etmek yararlı olmamaktadır (Fonksiyonun minimum halini almasını engellemektedir).

Aşağıdaki örnekte BCD terimi hemen yokedilebilir (2. ve 4. terimlerin konsensüsü):

$$A'C'D + A'BD + \cancel{BCD} + ABC + ACD'$$

BCD yok edilince geriye 4 terim kalır. Fakat BCD yok edilmezse bu sefer verilen ifsdeded 2. ve 4. terimler yok edilebilir ve geriye 3 terim kalır ve fonksiyon aşağıda görüldüğü gibi daha çok basitleşir

(C and C' ve D and D' göz önüne alınmıştır.)

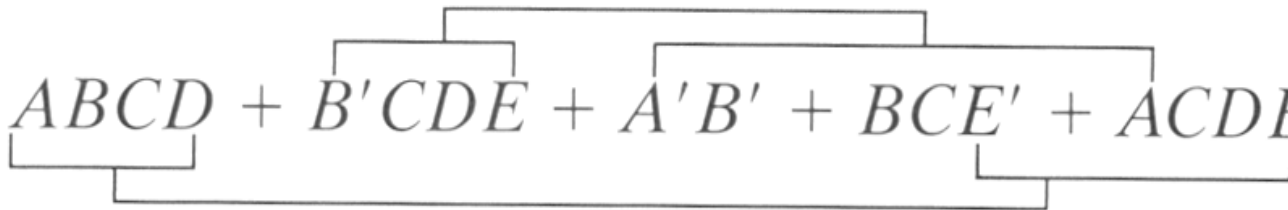
$$A'C'D + \cancel{A'BD} + BCD + \cancel{ABC} + ACD'$$

Bazen fonksiyonların minimum halini bulmak imkansıza yakın olabilir. Böyle durumlarda uygun konsensüs terimi veya terimleri eklenerek fonksiyonun bazı terimleri elimine edilerek basitleştirilebilir. Örneğin aşağıdaki bağıntıyı göz önüne alalım:

$$F = ABCD + B'CDE + A'B' + BCE'$$

ABCD+B'CDE terimlerinin konsensüsü ACDE. Bu terimi fonksiyona eklersek fonksiyonun iki terimi konsensüs terimi haline dönüşür elimine edilebilir:

$$F=ABCD+B'CDE+A'B'+BCE'+ACDE$$

$$F = ABCD + B'CDE + A'B' + BCE' + ACDE$$


Bu durumda $ABCD$ ve $B'CDE$ terimleri konsensüs terimleri olur. Bu terimler yok edildiğinde fonksiyon aşağıda görüldüğü gibi 4 terimden 3 terime basitleştirilmiş olur.

$$F = A'B' + BCE' + ACDE$$

$ACDE$ terimi artık gereksiz bir terim değil ve sonuç fonksiyonun bir parçası olarak kalacaktır.

Boole ifadelerinin Cebirsel Olarak Basitleştirilmesi:

Aşağıdaki adımlar uygulanır:

a) Terimler birleştirilir ($XY+XY'=X$ veya $X(Y+Y')=X$)

b) Terimler eliminate ($X+XY=X$ veya $(1+Y)=1$) ve mümkün olan yerde konsensüs teoremi uygulanır ($XY+X'Z+YZ=XY+X'Z$)

c) *Literaller elimine edilir.* ($X+X'Y=X+Y$)

$$[XX+X'Y=(X+Y)(X+X')=X+Y]$$

d) *Etkisiz terimler ilave edilir.* xx' ilave edilir veya $(x+x')$ ile çarpılır veya $xy+x'z$ terimine yz ilave edilir veya $(x+y)(x'+z)$ terimi $(y+z)$ ile çarpılır. (*konsensüs teoremi*)

1. Terimler birleştirilir. $XY + XY' = X$ teoremi kullanılır. Örnek:

$$abc'd' + abcd' = abd' \quad [X = abd', Y = c]$$

Başka bir örnek:

$$\begin{aligned} ab'c + abc + a'bc &= ab'c + abc + abc + a'bc = ac + bc \\ (=ac(b' + b) + bc(a + a')) &= ac + bc \end{aligned}$$

X ve Y yalın literaller olma yerine birer bağımsız ifadede olabilirler. Bu durmda konsensüs teoremi aynen uygulanabilir. Aşağıdaki örnek bu kavramı açıklamaktadır:

$$(a + bc)(d + e') + a'(b' + c')(d + e') = d + e'$$
$$[X = d + e', Y = a + bc, Y' = a'(b' + c')]$$

$$=(d+e')[(a+bc) +a'(b'+c')]=d+e'$$
$$[x(y+y')=x]$$

2. Eliminating Terimler konsensüs Teoremi kullanılarak Elimine edilir. $X + XY = X$ ve konsensüs teoremi kullanılarak gereksiz termler elimine edilir.

$$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z$$

ÖRNEK:

$$a'b + a'bc = a'b$$

$$[X = a'b]$$

$$a'bc' + bcd + a'bd = a'bc' + bcd$$

$$[X = c, Y = bd, Z = a'b]$$

(Konsensüs teoremi)

$$a'b c' + b c d + \underline{a'bd} = a'bc' + bcd$$

3. Literaller Elimine edilir. Bunun için $X + X' Y = X + Y$ teoremi kullanılır.

ÖRNEK:

$$(B+B'C'D'=B+C'D)$$

$$[(bb+b'c'd)=(b+c'd)(b+b')=b+c'd]$$

$$\begin{aligned} A'B + A'B'C'D' + ABCD' &= A'(B + B'C'D') + ABCD' \\ &= A'(B + C'D') + ABCD' \\ &= B(A' + ACD') + A'C'D' \\ &= B(A' + CD') + A'C'D' \\ &= A'B + BCD' + A'C'D' \end{aligned}$$

4. Etkisiz terimler ilave edilmesi. İşe yaramayan (Redundant) terimler değişik şekillerde örneğin xx' ekleme, veya $(x + x')$ terimi ile çarpma, veya yz terimini $xy + x'z$ terimine ekleme veya xy terimini x terimine ekleme gibi.

Örnek:

$$\begin{aligned} & WX + XY + X'Z' + WY'Z' \\ &= WX + XY + X'Z' + WY'Z' + WZ' \\ &= WX + XY + X'Z' + WZ' \\ &= WX + XY + X'Z' \end{aligned}$$

Aşağıdaki örnek sözü edilen 4 metodu içinde barındırmaktadır:

$$\underbrace{A'B'C'D' + A'BC'D'}_{\textcircled{1} A'C'D'} + A'BD + \underbrace{A'BC'D}_{\textcircled{2}} + ABCD + ACD' + B'CD'$$

$$= A'C'D' + BD(A' + AC) + ACD' + B'CD'$$

$$= A'C'D' + A'BD + \underbrace{BCD + ACD'}_{\textcircled{3}} + B'CD'$$

$$+ \underbrace{ABC}_{\textcircled{4}} \quad (\text{consensus term})$$

$$= A'C'D' + \underbrace{A'BD + \cancel{BCD} + \cancel{ACD'} + B'CD' + ABC}_{\text{consensus } BCD} + \overbrace{ACD}^{\text{consensus } ACD}$$

$$= A'C'D' + A'BD + B'CD' + ABC$$

Eğer fonksiyon SOP yerine POS (product-of-sums) formuna getirilmesi isteniyorsa teoremlerin dualı kullanılır.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(A' + B' + C')}_{\textcircled{1} (A' + B')} (A' + B' + C) (B' + C) (A + C) \underbrace{(A + B + C)}_{\textcircled{2}} \\
 & = (A' + B') \underbrace{(B' + C)}_{\textcircled{3}} (A + C) = (A' + B')(A + C)
 \end{aligned}$$

Burada aşağıdaki bağıntılar kullanıldı:

$(x+y')(x+y)=x$ ($x=A'+B'$) (bu terim $xy+xy'=x$ ifadesinin dualıdır.)